

EXPRESSÕES LÓGICAS POR FORMAS CANÔNICAS



Nossos **objetivos** nesta aula são:

- Conhecer a extração de expressões lógicas a partir de tabelas.
- Conhecer Maxtermos e Mintermos.
- Praticar a obtenção de expressões por maxtermos e mintermos.



Para esta aula, utiliza-se como referência os itens 4.1 (**Forma de Soma-de-Produtos**), e 4.2 (**Simplificação de Circuitos Lógicos**), 4.2 (**Simplificação Algébrica**) e 4.3 (**Projetando Circuitos Combinacionais**) do **Capítulo 4 (Circuitos Lógicos Combinacionais)** do livro-texto:

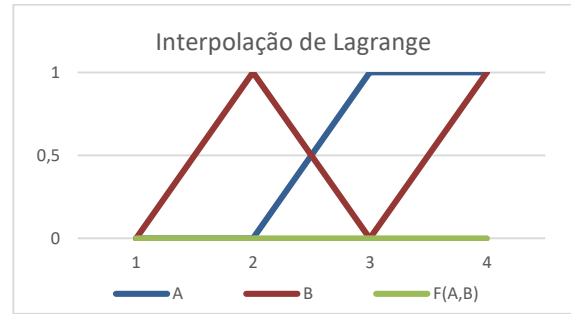
TOCCI, Ronald J.; WIDMER, Neal S.; MOSS, Gregory L. **Sistemas Digitais: princípios e aplicações**. 12ª Ed. Editora Pearson, 2019.

Não deixem de ler a indicação depois desta aula!

EXPRESSÕES LÓGICAS POR TABELAS

- Uma expressão lógica pode ser obtida a partir de uma tabela-verdade.
- As duas formas básicas para expressões lógicas são:
 - Forma disjuntiva normal (soma de produtos), e
 - Forma conjuntiva normal (produto de somas).
- Estas são duas formas duais de representação e de projetos em circuitos digitais.
- Métodos de simplificação e projetos utilizam usualmente a forma soma de produtos.
- A leitura da tabela-verdade é feita com base na fórmula de interpolação de Lagrange.

A	B	F(A,B)
0	0	F(0,0)
0	1	F(0,1)
1	0	F(1,0)
1	1	F(1,1)



Interpolação de Lagrange aplicado em Álgebra Booleana considerando duas variáveis A e B:

$$F(A,B) = F(0,0).\bar{A}.\bar{B} + F(0,1).\bar{A}.B + F(1,0).A.\bar{B} + F(1,1).A.B$$

FORMA DISJUNTIVA (SOMA DE PRODUTOS)

- Cada expressão consiste em dois ou mais termos AND (produtos) conectados por uma operação OR (soma).
- Cada termo AND consiste em uma ou mais variáveis que aparecem individualmente na tabela verdade.
- Quando a variável de entrada possui o valor lógico zero, a sua leitura é feita como uma variável negada.
- Quando a variável de entrada possui o valor lógico um, a sua leitura é feita como uma variável não negada.

EXERCÍCIO TUTORIADO

1. Obtenha a expressão booleana na forma de soma de produtos da seguinte tabela-verdade.

A	B	F(A,B)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

EXERCÍCIO COM DISCUSSÃO EM DUPLAS

2. Obtenha a expressão booleana na forma de soma de produtos da seguinte tabela-verdade.

A	B	C	F(A,B,C)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

FORMA CONJUNTIVA (PRODUTO DE SOMAS)

- Cada expressão consiste em dois ou mais termos OR (somas) conectados por uma operação AND (produto).
- Cada termo OR consiste em uma ou mais variáveis que aparecem individualmente na tabela verdade.
- Quando a variável de entrada possui o valor lógico zero, a sua leitura é feita como uma variável não negada.
- Quando a variável de entrada possui o valor lógico um, a sua leitura é feita como uma variável negada.

EXERCÍCIO TUTORIADO

3. Obtenha a expressão booleana na forma de produto de somas da seguinte tabela-verdade.

A	B	F(A,B)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

EXERCÍCIO TUTORIADO

4. As expressões obtidas nas questões 1 e 3 são equivalentes ? Prove.

Dica: Obtenha as expressões booleanas pelas formas disjuntiva e conjuntiva e prove que são idênticas.

EXERCÍCIO COM DISCUSSÃO EM DUPLAS

5. Obtenha a expressão booleana na forma de produto de somas da seguinte tabela-verdade.

A	B	C	F(A,B,C)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

MAXTERMOS E MINTERMOS

- Tabela-verdade pode ser lida nas formas disjuntiva e conjuntiva normais.
- **As leituras podem sofrer alguma simplificação utilizando teoremas para a criação de circuitos digitais otimizados.**
- Quando não há simplificação, a expressão pode ser expressa utilizando as variáveis de entrada ou podem ser expressas pela posição de cada leitura na tabela verdade.
 - Mintermos é equivalente a leitura por forma disjuntiva (soma de produtos):

$$F = \sum_{i=0}^{2^n-1} a_i \cdot m_i$$

- A forma mais usual e conveniente de representar a função por Mintermos:

$$F = \sum m(\text{indices})$$

- Maxtermos é equivalente a leitura por forma conjuntiva (produto de somas).

$$F = \prod_{i=0}^{2^n-1} (a_i + M_i)$$

- A forma mais usual e conveniente de representar a função por Maxtermos:

$$F = \prod M(\text{indices})$$

<i>i</i>	A	B	C	Mintermo	Maxtermo	F
0	0	0	0	$\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} = m_0$	$(A + B + C) = M_0$	a_0
1	0	0	1	$\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C = m_1$	$(A + B + \bar{C}) = M_1$	a_1
2	0	1	0	$\bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} = m_2$	$(A + \bar{B} + C) = M_2$	a_2
3	0	1	1	$\bar{A} \cdot B \cdot C = m_3$	$(A + \bar{B} + \bar{C}) = M_3$	a_3
4	1	0	0	$A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} = m_4$	$(\bar{A} + B + C) = M_4$	a_4
5	1	0	1	$A \cdot \bar{B} \cdot C = m_5$	$(\bar{A} + B + \bar{C}) = M_5$	a_5
6	1	1	0	$A \cdot B \cdot \bar{C} = m_6$	$(\bar{A} + \bar{B} + C) = M_6$	a_6
7	1	1	1	$A \cdot B \cdot C = m_7$	$(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}) = M_7$	a_7

EXERCÍCIO TUTORIADO

6. Obtenha a expressão da função F na forma de mintermos e maxtermos.

i	A	B	C	F	\bar{F}
0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0
2	0	1	0	1	0
3	0	1	1	0	1
4	1	0	0	1	0
5	1	0	1	0	1
6	1	1	0	0	1
7	1	1	1	1	0

EXERCÍCIO COM DISCUSSÃO EM DUPLAS

7. Obtenha a expressão da função \bar{F} na forma de mintermos e maxtermos.

NÚMERO DE VARIÁVEIS

- A informação do número de variáveis envolvidas pode não ser explícita.
 - Deve-se considerar o menor número possível.
 - Deve-se lembrar que para n variáveis há 2^n combinações.

EXERCÍCIO TUTORIADO

8. Obtenha a expressão da função F na forma de mintermos, considere variáveis X, Y e Z.

$$F = \sum m(0,2,3,7)$$

EXERCÍCIO COM DISCUSSÃO em DUPLAS

9. Obtenha a expressão da função F na forma de maxtermos, considere variáveis X, Y e Z.

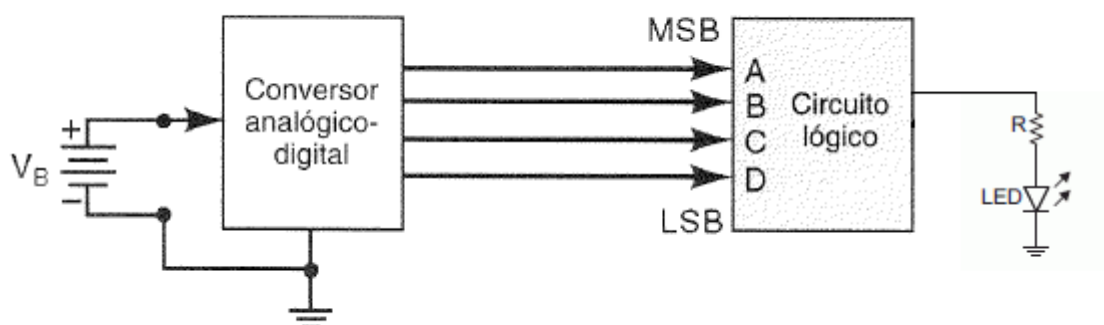
$$F = \prod M(1,4,5,6)$$

APLICAÇÃO PRÁTICA

10. Um conversor analógico-digital está monitorando a tensão de uma bateria de 15V de uma espaçonave em órbita. A saída do conversor é um número binário de 4 bits no formato ABCD, que corresponde à tensão da bateria em degraus de 1 V, o bit A é o MSB. Projete um circuito digital para ler o valor deste conversor e produzir uma saída em ALTO que ascenderá um LED no painel da aeronave sempre que o valor da bateria exceder 6V. Faça o circuito digital o mais otimizado possível e desenha um diagrama incluindo o conversor digital, circuito digital projeto incluindo o LED de sinalização no painel da aeronave.

Dica: utilize como base o exemplo 4.8 (página 151 do livro texto).

Diagrama lógico:



EXERCÍCIOS EXTRA-CLASSE

1. Simplifique as expressões a seguir.

a. $x = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C} + BC\bar{D} + A\bar{B}D$

b. $x = AB(\bar{A} + \bar{B})(A + AB)$

c. $x = ABC + AB + A$

2. Simplifique as seguintes funções:

a. $k = \prod M(0, 1, 7, 8, 9, 13, 14, 15)$

b. $k = \prod M(2, 3)$

c. $k = \prod M(1, 2, 3, 4)$

d. $k = \prod M(5, 6, 7)$

3. Em uma máquina copiadora um sinal de parada S é sempre gerado para interromper a operação da máquina e acionar uma luz indicadora (LED) sempre que uma das seguintes situações existir:

a) Quando a bandeja de alimentação estiver vazia uma chave CH1 é acionada.

b) Existem outras duas chaves (CH2 e CH3) na trajetória do papel que quando estiverem ativas simultaneamente, indicam congestionamento no caminho do papel de impressão.

A presença de papel na bandeja de alimentação é indicada por um sinal lógico P em nível alto gerado pela chave CH1. As demais chaves CH2 e CH3 produzem também um sinal lógico (Q e R) que vão para nível alto sempre que o papel e forem ativadas.

Projete um circuito lógico para produzir o sinal ALTO na saída S para as condições estabelecidas. Construa o circuito contendo as chaves, sinais, circuitos lógicos e LED de sinalização.