FACULDADE DE COMPUTAÇÃO E INFORMÁTICA
BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO
Matemática Discreta – Aula 16 – 2º SEMESTRE/2022

TEORIA: FUNÇÕES DISCRETAS RECURSIVAS (I)

Nossos **objetivos** nesta aula são:

- Conhecer o conceito de definição indutiva e sua relação com funções discretas recursivas indutivas
- Desenvolver funções discretas recursivas indutivas para problemas clássicos
- Especificar definições e funções recursivas indutivas no software Isabelle

Para esta aula, usamos novamente as seções **8.4 (Definição Indutiva) e 9.1 e 9.2 (Recursão)** do nosso livro da referência básica:

MENEZES, P.B. **Matemática Discreta para Computação e Informática**. 4.ed. Bookman: Porto Alegre, 2013.

Não deixem de ler estas seções depois desta aula!

DEFINIÇÕES INDUTIVAS

- Para que possamos caracterizar bem um determinado tipo de **função recursiva**, vamos precisar de um conceito anterior chamado **definição indutiva**.
- Numa definição indutiva, construímos uma noção baseada em dois elementos:
  - uma **base de indução**, onde explicitamos todos os casos elementares (mais simples).
  - **um passo indutivo**, que determina como os demais casos são definidos em termos dos anteriores.
- Por exemplo, suponha que queiramos definir indutivamente o fatorial de um número natural (n!):
  - base de indução: $0! = 1$
  - passo indutivo: $n! = n \times (n-1)!, \forall n \in, n \geq 1$

EXERCÍCIO TUTORIADO

Considere $R: A \to A$ uma endorrelação sobre A. Defina indutivamente o conceito de fecho transitivo desta relação.

EXERCÍCIO COM DISCUSSÃO EM DUPLAS

Defina indutivamente o conceito de fórmula lógica da Lógica Proposicional, vista no início da nossa disciplina.

FUNÇÕES RECURSIVAS INDUTIVAS

- Existe um fato matemático importante (que não será provado aqui), que estabelece que toda definição indutiva pode ser simulada por uma função recursiva, construída de forma muito semelhante aos dois casos da definição indutiva. Assim, vamos nos limitar aqui a somente funções construídas com base em definições indutivas.

- Por outro lado, nem toda função recursiva vem de uma base indutiva. Em termos de Teoria da Computação, dizemos que uma **função é recursiva se ela for computável**. Em termos computacionais, isto significa dizer que podemos escrever um programa que simula tal função.

- Para se construir uma função recursiva indutiva, seguimos os mesmos passos da definição indutiva:

  - uma **base de indução**, onde explicitamos todos os casos elementares de resultado da função.

  - **um passo indutivo**, que determina como calcular o valor da função em termos de casos anteriores.

- Como exemplo, vamos retomar o caso do fatorial. Para construirmos uma função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que calcule fatorial, fazemos:

  - **base de indução:** f(0)=1

  - **passo indutivo:** $f(n) = n \times f(n-1), \forall n \in, n \geq 1$

- Observe que, no passo indutivo, utilizamos o nome da função dentro da sua própria definição. Isto é o que caracteriza, numa linguagem de programação, a possibilidade de uso de recursão em funções.

EXERCÍCIO TUTORIADO

Construa indutivamente o conceito de máximo divisor comum (mdc) entre números naturais e construa uma função recursiva indutiva $mdc\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Esta função é parcial ou total ?

EXERCÍCIO COM DISCUSSÃO EM DUPLAS

Suponha que você tenha o conceito de sucessor e predecessor de um número natural. Vamos representá-los por suc(n) e pred(n).

A partir destes conceitos, construa a noção de soma de dois números naturais e, também, uma função recursiva indutiva $add: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ associada a esta noção.

EXERCÍCIOS

Defina indutivamente cada um dos conceitos abaixo, construa uma função recursiva indutiva.

1. Conceito de número natural par. ***Sugestão**: defina este conceito em termos de pertinência a um conjunto.*

2. Conceito de número natural ímpar.

3. Conceito de predecessor de um número natural maior que zero.

4. Conceito de maior nos números naturais. Por exemplo, qual o maior número entre 2 e 3.

EXERCÍCIOS EXTRA-CLASSE

a) Enumere os elementos dos conjuntos A e B definidos indutivamente abaixo:

a O conjunto **A** é indutivamente definido como segue:
$\mathbf{5} \in \mathbf{A}$
se $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$ e $\mathbf{y} \in \mathbf{A}$, então $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbf{A}$

b O conjunto **B** é indutivamente definido como segue:
$\mathbf{2} \in \mathbf{B}$ e $\mathbf{3} \in \mathbf{B}$
se $\mathbf{b} \in \mathbf{B}$, então $\mathbf{2b} \in \mathbf{B}$ e $\mathbf{3b} \in \mathbf{B}$

b) Para cada um dos conceitos abaixo, produza uma definição indutiva, uma função recursiva que simule esta definição e a implemente no software Isabelle:

- Multiplicação de dois números naturais. ***Sugestão**: pense uma multiplicação como uma composição de somas.*

- Exponenciação x^n, com x e n números naturais.

- Máximo entre dois números naturais.