FACULDADE DE COMPUTAÇÃO E INFORMÁTICA
BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO
Matemática Discreta – Aula 18 – 2º SEMESTRE/2022

TEORIA: FUNÇÕES DISCRETAS RECURSIVAS (III)

Nossos **objetivos** nesta aula são:

- Construir funções recursivas

Para esta aula, usamos novamente as seções **8.1 (Princípio da Indução Matemática) e 8.2 (Prova Indutiva)** do nosso livro da referência básica:

MENEZES, P.B. **Matemática Discreta para Computação e Informática**. 4.ed. Bookman: Porto Alegre, 2013.

Não deixem de ler estas seções depois desta aula!

PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA e o 1º PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FINITA

- O princípio da indução matemática é uma técnica para lidar com tipos de dados que têm uma **relação de boa-ordem**, isto é, uma relação onde todo subconjunto não-vazio do tipo de dado tem um elemento mínimo segundo esta relação de ordem.

- O conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, juntamente com a relação de ordem usual $\leq$, é um exemplo que exibe a propriedade de boa ordem. Podemos estender esta propriedade ao conjunto das funções das funções discretas.

- **1º Princípio da Indução (Matemática) Finita – PIF:** Seja $p(n)$ uma proposição sobre o conjunto $M = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq m \ e \ m \in \mathbb{N}\}$. Se:
    - $p(m)$ é verdadeira e
    - $\forall k \in M$, valer que $p(k) \longrightarrow p(k+1)$

  então $\forall n \in M, p(n)$ é verdadeira.

- O PIF nos disponibiliza uma estratégia muito interessante de provas de proposições, chamada **prova indutiva**. Se:
    - provarmos a validade de uma base $p(m)$ da proposição **(base indutiva)** e
    - assumindo-se que a proposição seja válida para $p(k)$, conseguirmos provar que $p(k+1)$ seja válida **(passo indutivo)**

  então, $p(n)$ será válida.

EXERCÍCIO TUTORIADO

Considere a $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida indutivamente abaixo:

- $f(0)=1$
- $f(n+1) = (n+1) \times f(n), \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 0$

Mostre, utilizando a prova indutiva via PIF, que esta função calcula $n!$.

Solução:

1) base de indução: f(0) = 1 = 0! e f(1) = 1xf(0) = 1x1 = 1 = 1!

2) Vamos supor que vale para n = k, então: f(k) = (k)xf(k-1) = k!

3) Devemos provar que vale para n = k + 1, isto é, que f(k + 1) = (k + 1)!

Mas, f(k+1) = (k + 1)xf(k) = (k + 1)x(k!) = (k + 1)! c.q.d.

EXERCÍCIOS

Para os exercícios abaixo, construa uma função recursiva que represente as sequências dadas:

1) Série de Fibonacci: 1 1 2 3 5 8 13 ...

2) $a_n = 2^n$ para n > 0

3) $a_n = 3n$

4) $a_n = n(n+1)$

5) Seja a função discreta definida recursivamente como:

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(n) = 5f(n-1), & se\ n > 0 \end{cases}$$

Demostre, utilizando o PIF que $f(n) = 5^n$

6) Seja a função discreta definida recursivamente como:

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(n) = f(n-1) + 7, \qquad se\ n > 0 \end{cases}$$

Demostre, utilizando o PIF que $f(n) = 7n$